ML odhad zpoždění dálkoměrného signálu

–

verze: 20090902

1 Popis úlohy

ML (Maximum Likelihood) odhad = nejvěrohodnější odhad

značení: vektor parametrů: $\mathbf{P}$, vektor měření: $\mathbf{X}$ (předpokládáme dimenzi N), vektor odhadu parametrů: $\hat{\mathbf{P}}$

k odhadu potřebuji znát hustotu pravděpodobnosti vektoru měřených hodnot $\mathbf{X}$ podmíněnou znalostí hledaných parametrů $\mathbf{P}$: $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\mathbf{P})$ resp. $\Pr(\mathbf{X} = \mathbf{x}|\mathbf{P})$

ML odhad je dán výrazem:

$$\hat{\mathbf{P}}_{ML} = \arg\max_{\check{\mathbf{P}}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\check{\mathbf{P}}) \tag{1}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{ML} = \arg\max_{\check{\mathbf{P}}} \Pr(\mathbf{X} = \mathbf{x}|\check{\mathbf{P}})$$

věrohodnostní funkce $\Lambda(\mathbf{P})$: až na (pro odhad) nevýznamné konstanty je rovna podmíněné hustotě pravděpodobnosti $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\mathbf{P})$, ML odhad se pak hledá jako maximum věrohodnostní funkce

$$\hat{\mathbf{P}}_{ML} = \arg\max_{\check{\mathbf{P}}} \Lambda(\check{\mathbf{P}})$$

2 Odhad zpoždění dálkoměrného signálu v šumu

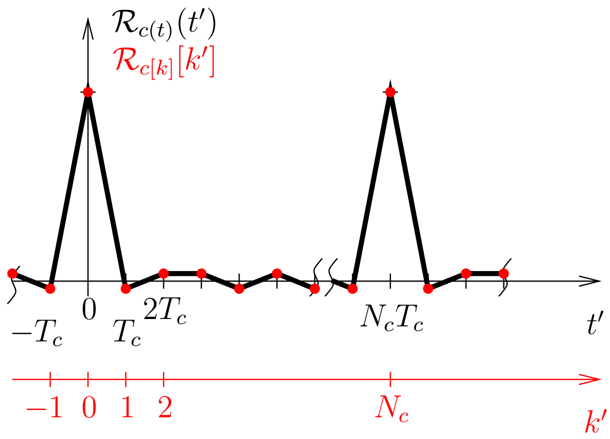
2.1 Model signálu

Předpokládáme měřený (zpracovávaný) signál ve tvaru

$$x(t) = Ac(t - \tau) + n(t),$$

kde $c(t - \tau)$ je dálkoměrný (pseudonáhodný) signál s neznámým zpožděním τ, A je nenáhodná konstanta a $n(t)$ je aditivní šum.

Dálkoměrný signál $c(t)$ je deterministický signál, jehož autokorelační funkce se blíží autokorelační funkci bílého šumu – v hodnotě $\tau = 0$ nabývá autokorelační funkce výrazného



Obr. 1: Autokorelační funkce $\mathcal{R}_{c(t)}(t')$ dálkoměrného (pseudonáhodného) signálu $c(t)$, její vztah k autokorelační funkci $\mathcal{R}_{c[k]}[k']$ odpovídajíc pseudonáhodné posloupnosti $c[k]$

maxima. Protože je $c(t)$ signál periodický, je periodická i jeho autokorelační funkce, viz obr. 1.

Dálkoměrný signál $c(t)$ je odvozen z odpovídající pseudonáhodné posloupnosti $c[k]$. Jednotlivé hodnoty této posloupnosti – čipy – nabývají hodnoty z množiny $\{-1, 1\}$. Mezi $c(t)$ a $c[k]$ platí vztah

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c[k]\, h(t - kT_c),$$

kde T_c je doba trvání čipu a $h(t)$ je obdélníkový modulační impulz s dobou trvání T_c. Posloupnost $c[k]$ je periodická, její periodu označíme N_c. Potom je perioda signálu $c(t)$ rovna hodnotě N_cT_c.

Autokorelační funkce $\mathcal{R}_c(t') = \mathrm{Av}\{c(t)c(t+t')\}$ dálkoměrného signálu $c(t)$ a autokorelační funkce $\mathcal{R}_c[k'] = \mathrm{Av}\{s[k]s[k+k']\}$ pseudonáhodné posloupnosti $c[k]$ je znázorněna na obr. 1.

O aditivním šumu $n(t)$ budeme předpokládat, že je pásmově omezený bílý gaussovský šum na intervalu $|\omega| < 2\pi B$, kde $B = f_{sa}/2$. Na tomto intervalu nechť má šum spektrální výkonovou hustotu s hodnotou $N_0/2$, tedy

$$\mathcal{C}_{n(t)}(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \text{pro } \omega \in (-2\pi B, 2\pi B), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

2.2 Odvození věrohodnostní funkce

Nejprve úlohu převedeme do diskrétního času. Měřený signál $x(t)$ vzorkujeme se vzorkovacím kmitočtem $f_{sa} = 1/T_{sa}$, získáme $x[k] = x(kT_{sa})$. Hledaný parametr τ v diskrétním čase označíme jako m, jeho vztah k τ je $m = \mathrm{round}(\tau/T_{sa})$.

Získáváme model měřeného signálu v diskrétním čase

$$x[k] = Ac[k-m] + n[k] \doteq Ac(kT_{sa} - mT_{sa}) + n(kT_{sa}) = x(kT_{sa}).$$

Vektor měření $\mathbf{X}$ je reprezentován vzorky měřeného signálu x, tedy $\mathbf{X} = (x[k_p], x[k_p + 1], \ldots, x[k_p + N - 1])$. Parametr, který je předmětem odhadu, je skalár P (ne vektor $\mathbf{P}$ jako v obecném případě v kap. 1), tedy $P = \tau \doteq mT_{sa}$. Odhad parametru potom označíme jako $\hat{P} = \hat{\tau} \doteq \hat{m}T_{sa}$.

Zabývejme se dále odvozením podmíněné hustoty pravděpodobnosti $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|m)$, který potřebujeme pro ML odhad dle (1). Díky volbě $B = f_{sa}/2$ jsou vzorky šumu $n[k]$ nekorelované, autokorelační funkce takového šumu má tvar $\mathcal{R}_{n[k]}[k'] = f_{sa}\frac{N_0}{2}\delta[k']$ a rozptyl vzorků šumu je $\mathrm{var}\{n[k]\} = \mathcal{R}_{n[k]}[0] = f_{sa}\frac{N_0}{2}$. Protože (dle předpokladu) má $n[k]$ normální (Gaussovo) rozdělení s nulovou střední hodnotou, bude pro hustotu pravděpodobnosti jednoho vzorku $x[k]$ platit

$$p_{x[k]}(x[k]|m) = \frac{1}{\sqrt{\pi f_{sa} N_0}} \exp\left(-\frac{1}{f_{sa}N_0}\left(x[k] - Ac[k-m]\right)^2\right). \tag{2}$$

Díky nezávislosti $n[k]$ budou statisticky nezávislé i vzorky signálu $x[k]$. Sdružená hustota pravděpodobnosti vektoru $\mathbf{X}$ je pak dána součinem jednotlivých hustot (2), tedy

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|m) = \prod_{k=k_p}^{k_p+N-1} p_{x[k]}(x[k]|m) =$$

$$= \frac{1}{(\pi f_{sa} N_0)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{f_{sa}N_0} \sum_{k=k_p}^{k_p+N-1} \left(x[k] - Ac[k-m]\right)^2\right). \tag{3}$$

Pro ML odhad zpoždění $\hat{m}$ pak platí

$$\hat{m}_{ML} = \arg\max_{\check{m}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\check{m}). \tag{4}$$

Hustota pravděpodobnosti (3) je pro odhad dle (4) zbytečně moc složitá. Výraz hustoty (3) dále zjednodušíme, jednotlivé úpravy provádíme tak, aby neměly vliv na hledání $\arg\max\{.\}$ daného výrazu. Nejprve odstraníme nevýznamnou konstantu $1/(\pi f_{sa} N_0)^{\frac{N}{2}}$. Dále, vzhledem k monotónnosti exponenciály lze $\exp(.)$ rovněž odstranit a to i včetně konstanty $\frac{1}{f_{sa}N_0}$. Díky znaménku $-$ uvnitř exp(.) přecházíme z $\arg\max\{.\}$ na $\arg\min\{.\}$. ML odhad lze pak přepsat na tvar

$$\hat{m}_{ML} = \arg\min_{\check{m}} \sum_{k=k_p}^{k_p+N-1} \left(x[k] - Ac[k-\check{m}]\right)^2 . \tag{5}$$

Tvar ML odhadu (5) představuje celkem logický závěr: hledáme takový parametr $\check{m}$, který minimalizuje chybovou energii mezi přijatým signálem $x[k]$ a modelem užitečné části signálu $Ac[k-\check{m}]$.

Výraz lze ale ještě dále upravit

$$(x[k] - Ac[k-\check{m}])^2 = x^2[k] + A^2 \underbrace{c^2[k-\check{m}]}_{1} - 2Ax[k]c[k-\check{m}]. \tag{6}$$

Protože na parametru $\check{m}$ závisí jen poslední člen, lze odhad přepsat na následující tvar (znaménko $-$ před posledním členem změní opět $\arg\min$ na $\arg\max$)

$$\hat{m}_{ML} = \arg\max_{\check{m}} \sum_{k=k_p}^{k_p+N-1} x[k]c[k-\check{m}] = \arg\max_{\check{m}} \mathcal{R}_{x,c}[-\check{m}] \arg\max_{\check{m}} \Lambda(\check{m}),$$

tj. hledáme takový argument $\check{m}$, při kterém vzájemná korelační funkce signálů $x[k]$ a $c[k]$ nabývá svého maxima.