Výpočet spektra signálu pomocí DFT

kacmarp@fel.cvut.cz

verze: 20090913

1 Úvod

Signály můžeme rozdělit na signály spojité v čase nebo diskrétní v čase. Další možné dělení je na signály periodické nebo signály neperiodické. Dostáváme tak celkem čtyři kombinace těchto vlastností a tedy i čtyři skupiny signálů. Ke každé takové skupině je definován jiný transformační vztah, který mezi sebou váže signál (jeho časový průběh) a spektrum – FT{.}, DtFT{.}, FS{.} a DFS{.}.

V reálných situacích těžko můžeme předpokládat, že budeme znát analytické vyjádření signálu a že budeme moci provést výpočet spektra dle definičního vztahu. V praxi se musíme spokojit se vzorky signálu a to navíc na konečném časovém intervalu.

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) představuje numerický prostředek výpočtu všech čtyř uvažovaných transformací. Aby bylo možné výsledek DFT použít, je potřeba ho správně interpretovat. Dále je potřeba si uvědomit, že pro některé transformace nebo typy signálu dostaneme jen přibližný výsledek spektra.

Cílem cvičení je si na konkrétních signálech vyzkoušet výpočet jejich spektra pomocí DFT. Příklady jsou voleny tak, aby byly zastoupeny signály ze všech skupin. Každý příklad je zadán analytickým vztahem signálu (jeho časovou závislostí) a zároveň je poskytnut i analytický tvar spektra (analytický tvar spektra si hloubavý student zkontroluje v rámci domácího cvičení). Úkolem studenta je daný signál implementovat v programu Matlab a provést srovnání spektra vypočteného numericky pomocí DFT se spektrem zadaným analyticky. Dostačující bude provádět srovnání jen amplitudového spektra a to formou ve společném grafu.

Pro lepší kontrolu jsou u každého zadaného signálu obrázky jak časového průběhu tak i amplitudového spektra pro konkrétní parametry signálu.

2 Diskrétní Fourierova řada – DFS

Označíme $d_n = \mathrm{DFS}\{s[k]\}$. Koeficienty Fourierovy řady d_n diskrétního periodického signálu $s[k]$ lze pomocí DFT vypočítat dle vztahu

$$d_n = \frac{1}{N_0}\mathrm{DFT}\{s[k]\}.$$

Jako argument DTF dosazujme právě jednu periodu $s[k]$. Hodnota N_0 je perioda signálu $s[k]$.

Výpočet DFS{.} pomocí DFT je bezproblémový, vždy dostaneme přesné hodnoty koeficientů d_n.

Příklad 1:

Signál $s[k]$ na intervalu jedné periody $k = 0, \ldots, N_0 - 1$ je dána vztahem

$$s_{per}[k] = A\, a^k,$$

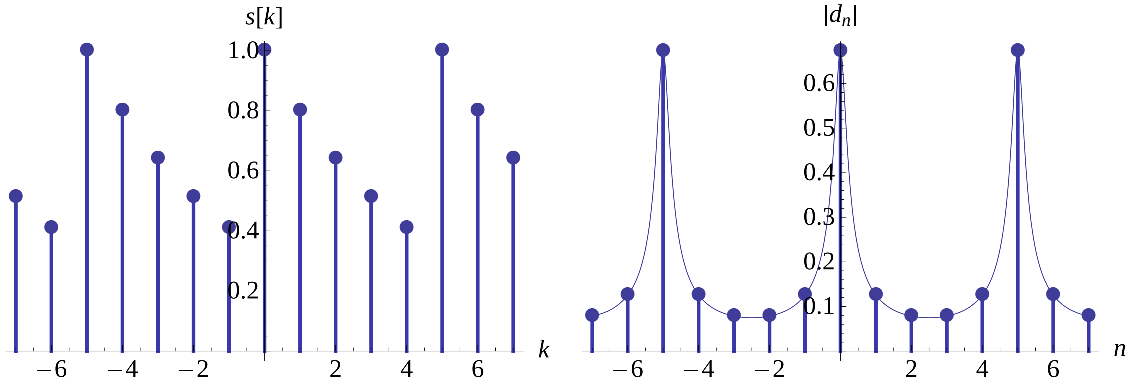
kde $A > 0$ a $1 > a > 0$. Pro signál $s[k]$ na celém intervalu $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$s[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_{per}[k - iN_0] \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Spektrum signálu, koeficienty Fourierovy řady $d_n = \mathrm{DFS}\{s[k]\}$, jsou dány vztahem

$$d_n = \frac{A}{N_0} \frac{\left(1 - a^{N_0}\right)}{\left(1 - a\ \exp(-\frac{\mathrm{j}2\pi n}{N_0})\right)}.$$

Na obrázku je zobrazen $s[k]$ a amplitudové spektrum $|d_n|$ pro parametry $N_0 = 5$, $A = 1.0$ a $a = 0.8$:



a) b)

Příklad 2:

Signál $s[k]$ na intervalu jedné periody $k = 0, \ldots, N_0 - 1$ je dán vztahem

$$s_{per}[k] = \begin{cases} A & \text{pro } k = 0, \ldots, N_1 - 1, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

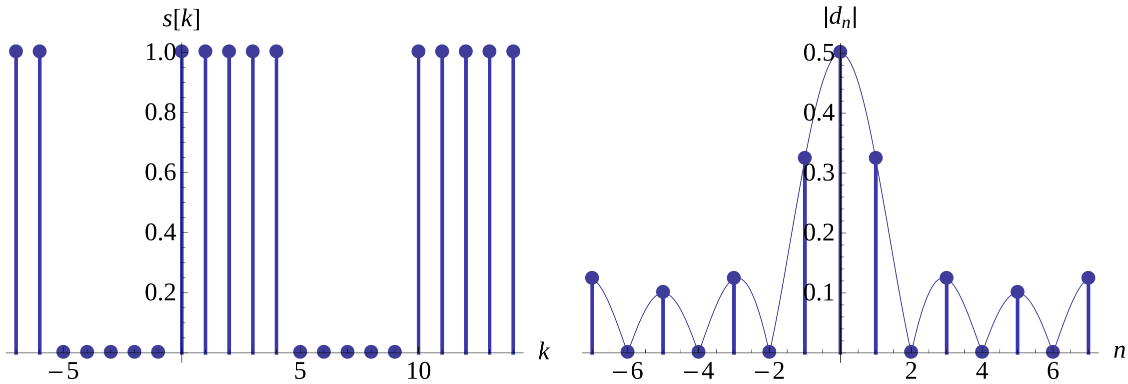
kde $A > 0$, $N_0 > N_1 > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}$. Pro signál $s[k]$ na celém intervalu $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$s[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_{per}[k - iN_0] \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Spektrum signálu, koeficienty Fourierovy řady $d_n = \mathrm{DFS}\{s[k]\}$, jsou dány vztahem

$$d_n = \begin{cases} \frac{A}{N_0} \frac{-\exp(-\frac{j2\pi n}{N_0})\left(1-\exp(-\frac{j2\pi n N_1}{N_0})\right)}{\left(1-\exp(-\frac{j2\pi n}{N_0})\right)} & \text{pro } n \neq iN_0,\ i \in \mathbb{Z}, \\ \frac{A}{N_0} N_1 & \text{pro } n = iN_0,\ i \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Na obrázku je zobrazen signál $s[k]$ a amplitudové spektrum $|d_n|$ pro $N_0 = 10$, $A = 1.0$ a $N_1 = 5$:



a) b)

3 Fourierova transformace v diskrétním čase – DtFT

Označíme $S(\Omega) = \mathrm{DtFT}\{s[k]\}$. Vzorky spektra $S(n\Omega_0)$ diskrétního signálu $s[k]$ na násobcích Ω_0 lze pomocí DFT vypočítat dle vztahu

$$S(n\Omega_0) = \mathrm{DFT}\{s[k]\}.$$

Pomocí DFT lze získat jen spektrum na násobcích $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$. Hodnota N je délka intervalu signálu $s[k]$, která je použitá pro výpočet spektra pomocí DFT.

V případě finitního signálu máme možnost provést výpočet na celém intervalu, kde je signál $s[k]$ nenulový. V tomto případě dostaneme přesné hodnoty vzorků spektra $S(n\Omega_0)$. S rostoucím N (při doplnění signálu $s[k]$ nulovými vzorky) dostaneme hustěji navzorkované spektrum (krok ve spektru $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ se zmenšuje).

V případě nefinitního signálu dostaneme jen přibližné hodnoty $S(n\Omega_0)$, které se s rostoucím N zpřesňují.

Příklad 3:

Diskrétní signál $s[k]$ je dán vztahem

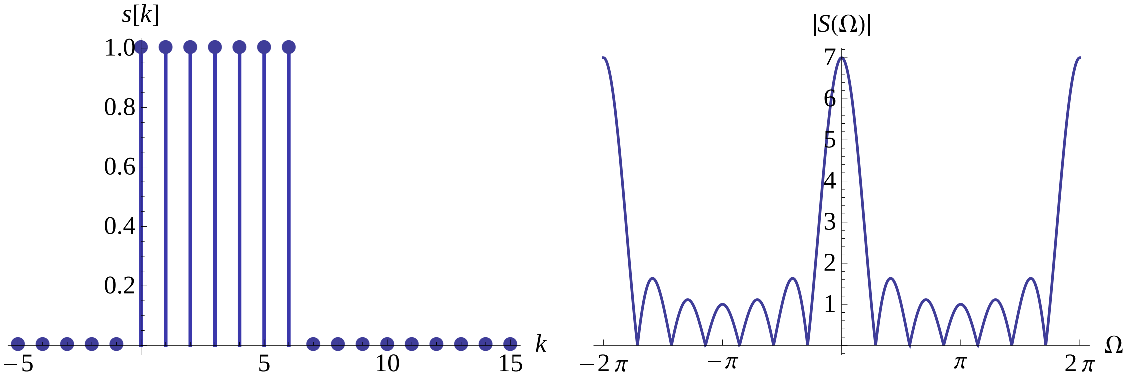
$$s[k] = \begin{cases} A & \text{pro } k = 0, \dots, N_1 - 1, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

kde $A > 0$, $N_1 > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}$.

Spektrum signálu $S(\Omega) = \mathrm{DtFT}\{s[k]\}$ je dáno vztahem

$$S(\Omega) = A \frac{-\exp(\mathrm{j}\Omega)\left(1 - \exp(-\mathrm{j}N_1\Omega)\right)}{\left(1 - \exp(\mathrm{j}\Omega)\right)}.$$

Na obrázku je zobrazen signál $s[k]$ a jeho amplitudové spektrum $|S(\Omega)|$ pro parametry $A = 1.0$ a $N_1 = 7$:



a) b)

Příklad 4:

Diskrétní signál $s[k]$ je dán vztahem

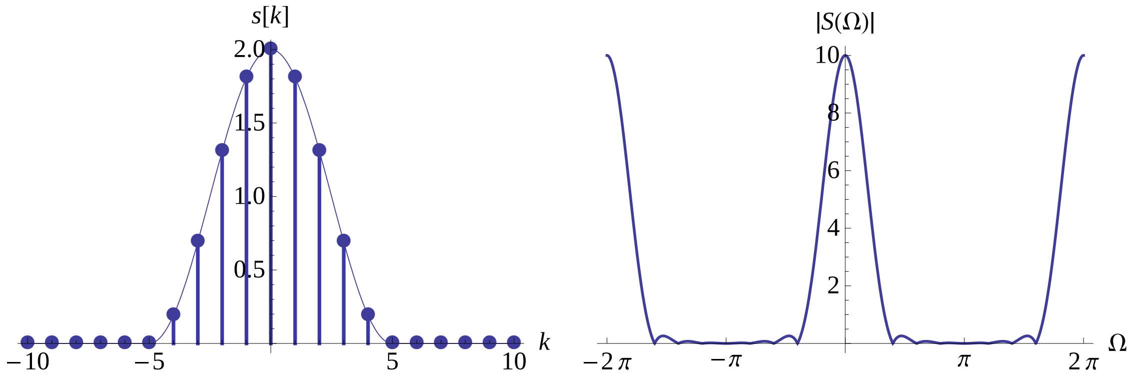
$$s[k] = \begin{cases} A\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{N_1}k\right)\right) & \text{pro } k = -N_1, \dots N_1, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

kde $A > 0$, $N_1 > 0$ $N_1 \in \mathbb{N}$.

Spektrum signálu $S(\Omega) = \mathrm{DtFT}\{s[k]\}$ je dáno vztahem

$$S(\Omega) = A \frac{\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \sin(N_1\Omega) \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{N_1}\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{N_1}\right) - \cos(\Omega)}.$$

Na obrázku je zobrazen signál $s[k]$ a jeho amplitudové spektrum $|S(\Omega)|$ pro hodnoty $A = 1.0$ a $N_1 = 5$:



a) b)

Příklad 5:

Diskrétní signál $s[k]$ je dán vztahem

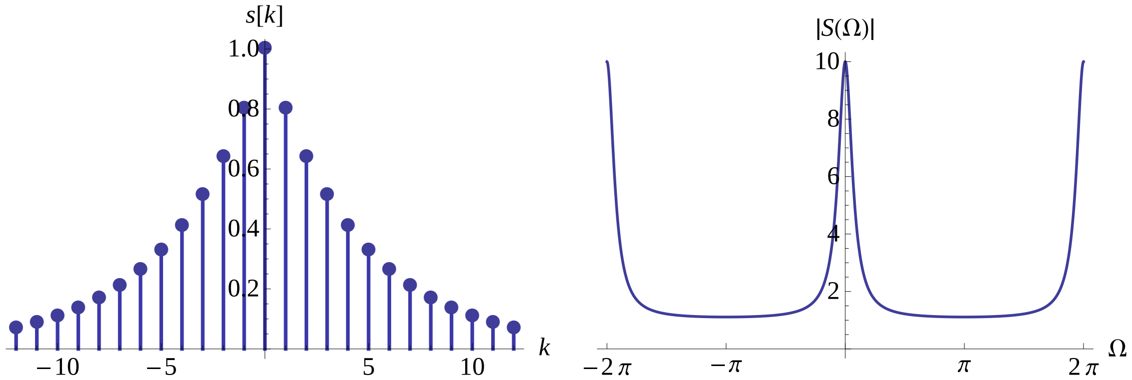
$$s[k] = A\, a^{|k|},$$

kde $A > 0$, $1 > a > 0$.

Spektrum signálu $S(\Omega) = \mathrm{DtFT}\{s[k]\}$ je dáno vztahem

$$S(\Omega) = 2A \frac{(1 - a\cos(\Omega))}{1 - 2a\cos(\Omega) + a^2}.$$

Na obrázku je zobrazen signál $s[k]$ a jeho amplitudové spektrum $|S(\Omega)|$ pro hodnoty $A = 1.0$ a $a = 0.8$:



a) b)

Příklad 6:

Diskrétní signál $s[k]$ je dán vztahem

$$s[k] = A\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{N_0}k\right)\right),$$

kde $A > 0,\ N_0 > 0,\ N_0 \in \mathbb{N}$.

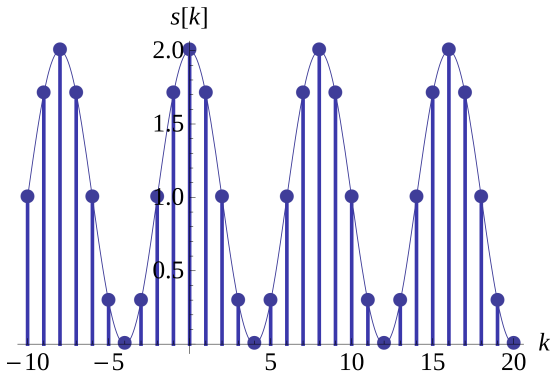
Spektrum signálu $S(\Omega) = \mathrm{DtFT}\{s[k]\}$ na intervalu $\Omega \in (-\pi, \pi\rangle$ označíme jako $S_{per}(\Omega)$. Platí

$$S_{per}(\Omega) = 2\pi A\left(\delta(\Omega) + \frac{1}{2}\delta(\Omega - \frac{2\pi}{N_0}) + \frac{1}{2}\delta(\Omega + \frac{2\pi}{N_0})\right).$$

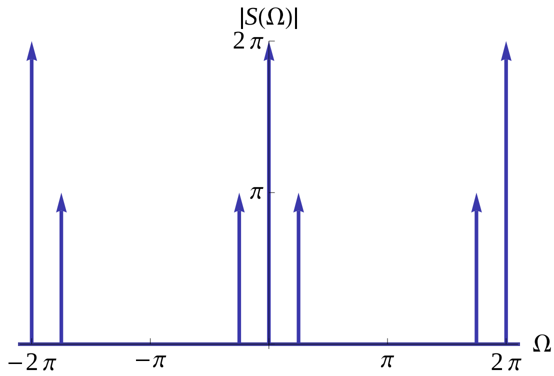
Pro spektrum $S(\Omega)$ na celém intervalu $\Omega \in \mathbb{R}$ platí

$$S(\Omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} S_{per}(\Omega - i\,2\pi) \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Na obrázku je zobrazen signál $s[k]$ a amplitudové spektrum $|S(\Omega)|$ pro hodnoty $A = 1.0$ a $N_0 = 8$.



a)



b)

4 Fourierova řada – FS

Označíme $c_n = \mathrm{FS}\{s(t)\}$. Aby bylo možné provést výpočet koeficientů Fourierovy řady c_n spojitého periodického signálu $s(t)$ pomocí DFT je potřeba signál $s(t)$ vzorkovat. Signál $s(t)$ budeme vzorkovat tak, aby na základní periodu T_0 vycházel celý počet vzorků, tedy poměr T_0/T_{sa} nechť je celé číslo.

Koeficienty c_n spojitého periodického signálu $s(t)$ lze vypočítat podle vztahu

$$c_n = \frac{T_{sa}}{T_0}\,\mathrm{DFT}\{s(kT_{sa})\}.$$

Jako argument DFT dosazujeme vzorky právě jedné periody $s(t)$.

V případě, že je signál $s(t)$ navzorkován tak, že je splněna vzorkovací podmínka, získáme přesné hodnoty koeficientů c_n. To je možné jen v případě spektrálně omezených signálů. V opačném případě dostaneme jen přibližné hodnoty c_n (které se s rostoucím $f_{sa} = 1/T_{sa}$ zpřesňují).

Příklad 7:

Spojitý periodický signál $s(t)$ s periodou T_0 je dán vztahem

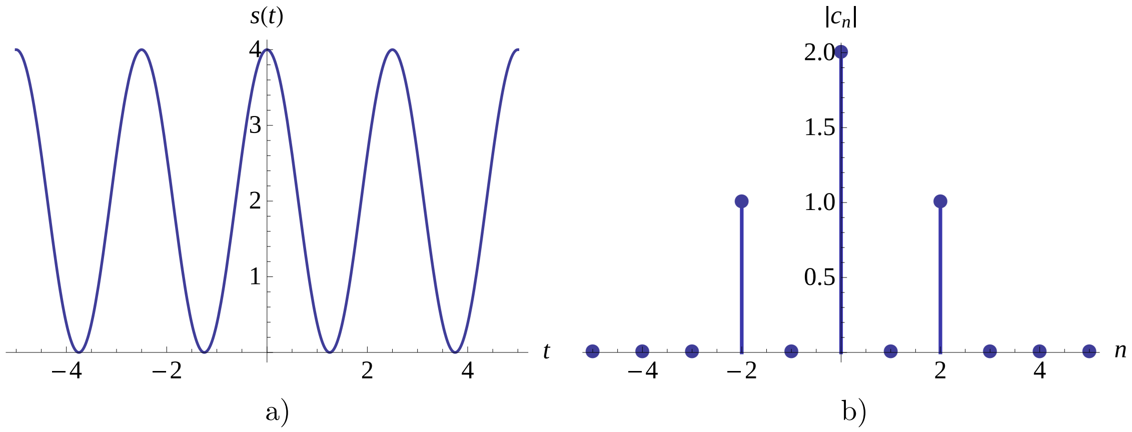
$$s(t) = 2A\left(\cos^2(\frac{2\pi}{T_0}t)\right),$$

kde $A > 0$.

Pro spektrum signálu, jeho koeficienty Fourierovy řady, platí

$$c_n = \begin{cases} 2A & \text{pro } n = 0, \\ A & \text{pro } n = \pm 1, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Na obrázku je signál $s(t)$ a amplitudové spektrum $|c_n|$ zobrazeno pro parametry $A = 1.0$ a $T_0 = 5.0$:



Příklad 8:

Spojitý periodický signál $s(t)$ na intervalu jedné periody $t \in \langle 0, T_0)$ je dán vztahem

$$s_{per}(t) = \begin{cases} A & \text{pro } t \in \langle 0, T_1), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

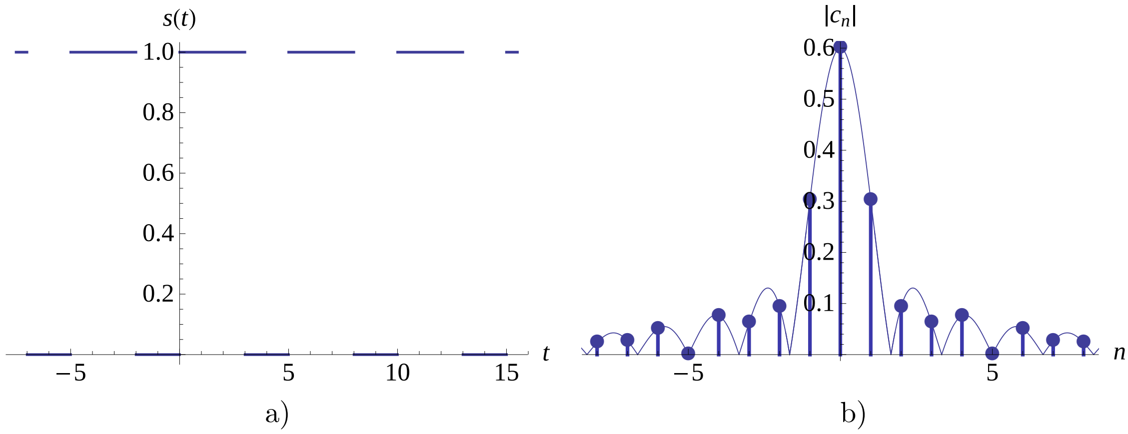
kde $A > 0$, $T_0 > T_1 > 0$. Pro signál $s(t)$ na celém intervalu $t \in \mathbb{R}$ platí

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_{per}(t - i\,T_0) \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Pro spektrum signálu, jeho koeficienty Fourierovy řady, platí

$$c_n = \begin{cases} \frac{A}{\mathrm{j}2\pi n}\left(1 - \exp\left(\frac{-\mathrm{j}2\pi n T_1}{T_0}\right)\right) & \text{pro } n \neq 0, \\ A\frac{T_1}{T_0} & \text{pro } n = 0. \end{cases}$$

Na obrázku je signál $s(t)$ a amplitudové spektrum $|c_n|$ zobrazeno pro parametry $A = 1.0$, $T_0 = 5.0$ a $T_1 = 3.0$:



Příklad 9:

Spojitý periodický signál $s(t)$ na intervalu jedné periody $t \in \langle 0, T_0)$ je dán vztahem

$$s_{per}(t) = \begin{cases} A\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) & \text{pro } t \in \left\langle 0, \frac{T_0}{2}\right), \\ 0 & \text{jinde}, \end{cases}$$

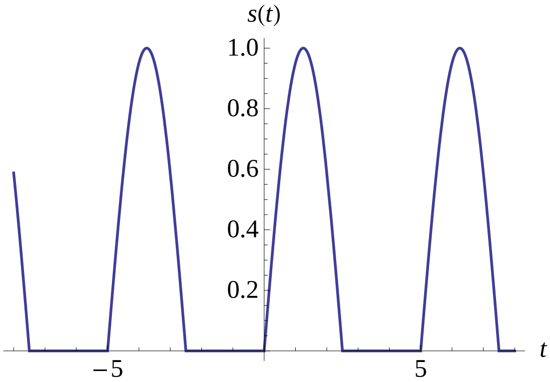
kde $A > 0$. Pro signál $s(t)$ na celém intervalu $t \in \mathbb{R}$ platí

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_{per}(t - i\,T_0).$$

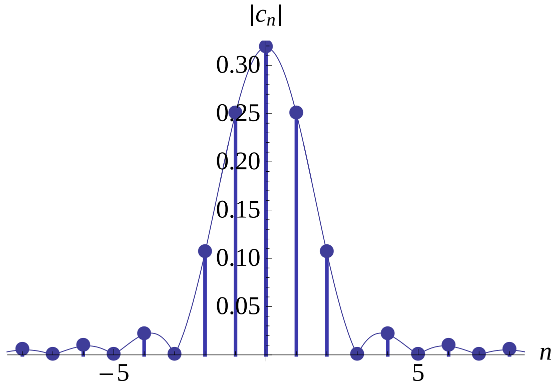
Pro spektrum signálu, jeho koeficienty Fourierovy řady, platí

$$c_n = \begin{cases} \frac{A}{2\pi}\left(\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\right) & \text{pro } n \neq \pm 1, \\ \mathrm{j}\frac{A}{4} & \text{pro } n = -1, \\ -\mathrm{j}\frac{A}{4} & \text{pro } n = 1. \end{cases}$$

Na obrázku je signál $s(t)$ a amplitudové spektrum $|c_n|$ zobrazeno pro parametry $A = 1.0$ a $T_0 = 5.0$:



a)



b)

5 Fourierova transformace – FT

Označíme $S(\omega) = \mathrm{FT}\{s(t)\}$. Před použitím DFT je potřeba signál $s(t)$ navzorkovat. Vzorkovací periodu označíme $T_{sa} = 1/f_{sa}$. Pomocí DFT získáme vzorky spektra $S(n\omega_0)$ na násobcích ω_0. Krok v kmitočtu má hodnotu $\omega_0 = 2\pi \frac{f_{sa}}{N}$ kde N je počet vzorků signálu $s(t)$, které dosadíme jako argument transformace DFT.

Vzorky spektra $S(n\omega_0)$ spojitého signálu $s(t)$ lze vypočítat podle vztahu

$$S(n\omega_0) = T_{sa}\,\mathrm{DFT}\{s(kT_{sa})\}.$$

Výpočet spektra $S(\omega)$ pomocí DFT je vždy přibližný. Při odvození postupu výpočtu je totiž potřeba předpokládat, že je signál $s(t)$ jak spektrálně omezený tak i finitní, což nikdy nemůže být splněno současně.

Příklad 10:

Signál ve spojitém čase je dán vztahem

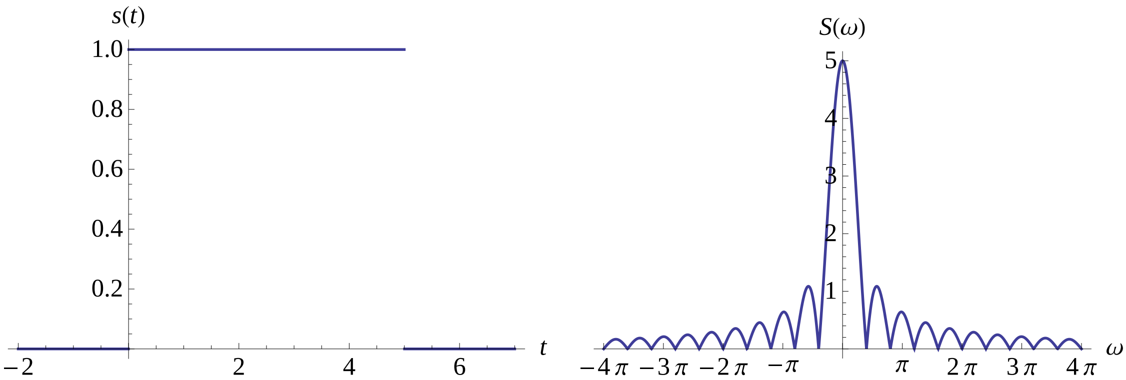
$$s(t) = \begin{cases} A & \text{pro } t \in \langle 0, T_1) \,, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

kde $A > 0$, $T_1 > 0$.

Pro spektrum signálu $s(t)$ platí

$$S(\omega) = \frac{A}{\mathrm{j}\omega} \left(\exp(\mathrm{j}T_1\omega) - 1 \right).$$

Na obrázku je signál $s(t)$ a amplitudové spektrum $|S(\omega)|$ zobrazeno pro parametry $A = 1.0$ a $T_1 = 5.0$:



a) b)

Příklad 11:

Signál ve spojitém čase je dán vztahem

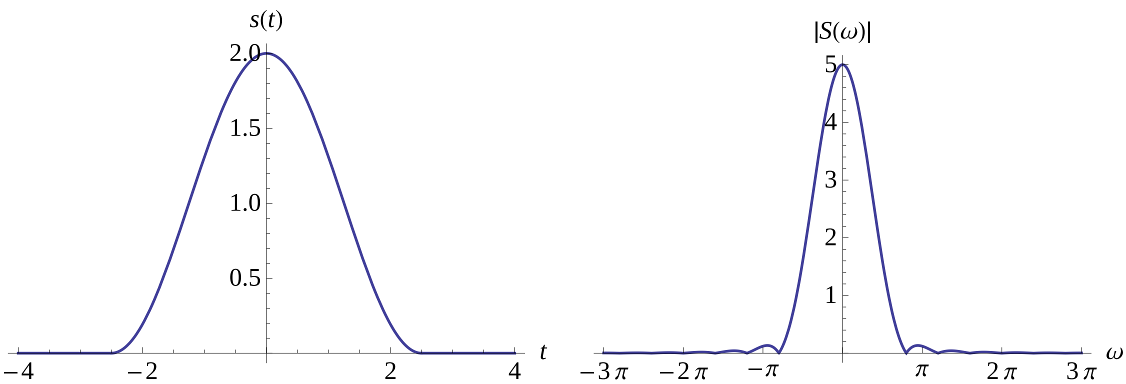
$$s(t) = \begin{cases} A\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)\right) & \text{pro } t \in \left\langle -\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}\right) , \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

kde $A > 0$ a $T_1 > 0$.

Pro spektrum signálu $s(t)$ platí

$$S(\omega) = \frac{2A}{\omega} \frac{\sin\left(\frac{T_1\omega}{2}\right)}{1 - \left(\frac{T_1\omega}{2\pi}\right)^2}.$$

Na obrázku je signál $s(t)$ a amplitudové spektrum $|S(\omega)|$ zobrazeno pro parametry$A = 1.0$ a $T_1 = 5.0$:



a) b)

Příklad 12:

Signál ve spojitém čase je dán vztahem

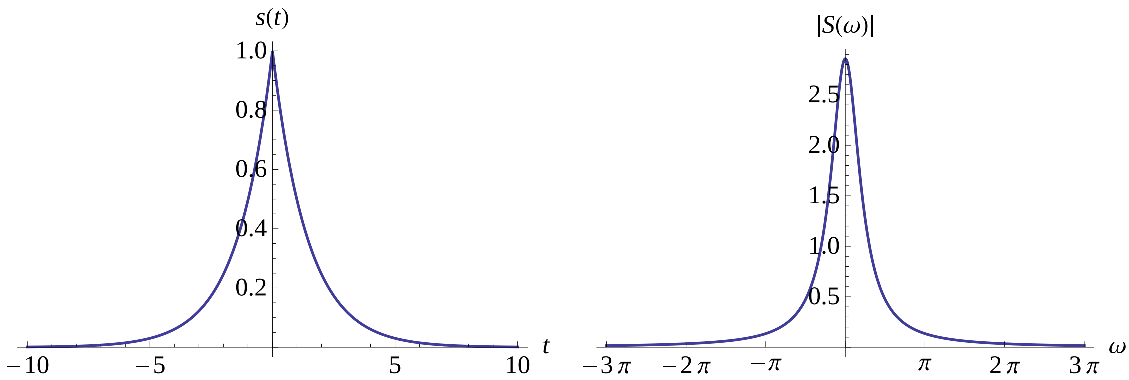
$$s(t) = A \exp(-a\,|t|)\,,$$

kde $A > 0$, $a > 0$.

Pro spektrum signálu $s(t)$ platí

$$S(\omega) = \frac{2aA}{a^2 + \omega^2}.$$

Na obrázku je signál $s(t)$ a amplitudové spektrum $|S(\omega)|$ zobrazeno pro parametry$A = 1.0$ a $a = 0.7$:



a) b)

Příklad 13:

Signál ve spojitém čase je dán vztahem

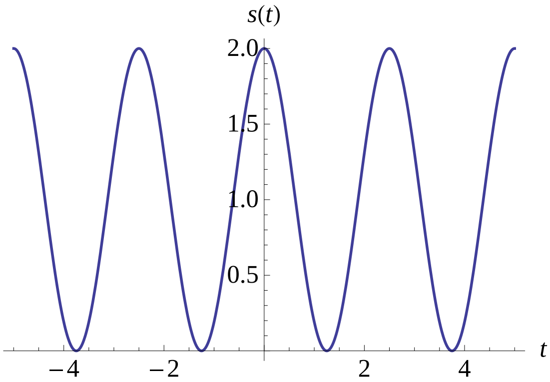
$$s(t) = A\left(1 + \cos\left(2\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right),$$

kde $A > 0$ a $T_0 > 0$.

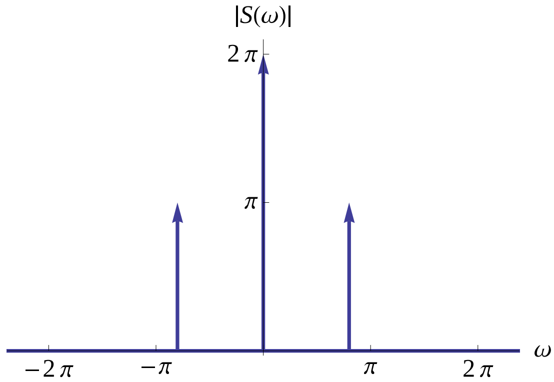
Pro spektrum signálu $s(t)$ platí

$$S(\omega) = 2\pi A\left(\delta(\omega) + \delta(\omega - 2\frac{2\pi}{T_0}) + \delta(\omega + 2\frac{2\pi}{T_0})\right).$$

Na obrázku je signál $s(t)$ a amplitudové spektrum $|S(\omega)|$ zobrazeno pro parametry $A = 1.0$ a $T_0 = 5.0$:



a)



b)